

Olimpiada Națională de Matematică  
Etapă locală a județului Alba, 13 februarie 2015

**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE - CLASA a X-a**

**Problema 1.**

- a) Să se arate că  $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0, (\forall)x \geq -1$ .  
b) Fie numerele reale  $a, b, c > 1$ . Să se arate că:

$$\log_a(b\sqrt{b} - 2b + 4) + \log_b(c\sqrt{c} - 2c + 4) + \log_c(a\sqrt{a} - 2a + 4) \geq 3.$$

Când avem egalitate?

**Soluție și barem:**

- a) •  $(x + 1)(x^2 - 4x + 4) \geq 0$  .....2p  
•  $(x + 1)(x - 2)^2 \geq 0, (\forall)x \geq -1$  .....1p  
b) Notăm  $E = \log_a(b\sqrt{b} - 2b + 4) + \log_b(c\sqrt{c} - 2c + 4) + \log_c(a\sqrt{a} - 2a + 4)$ .  
• Din punctul a) avem  $b\sqrt{b} - 2b + 4 \geq b, c\sqrt{c} - 2c + 4 \geq c, a\sqrt{a} - 2a + 4 \geq a$  .....1p  
• Cum  $a, b, c > 1$  obținem  $E \geq \log_a b + \log_b c + \log_c a$  .....1p  
• Din inegalitatea mediilor rezultă  $\log_a b + \log_b c + \log_c a \geq 3$ , deci  $E \geq 3$  .....1p  
• Avem egalitate dacă și numai dacă  $a = b = c = 4$  (conform punctului a)) .....1p

**Problema 2.**

Fie  $a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ . Se consideră o funcție injectivă  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că funcția  $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(\log_a x) + f(\log_b x)$  este constantă.

- a) Să se arate că  $a \cdot b = 1$ .  
b) Pentru  $b = \frac{1}{a}$ , să se dea un exemplu de funcție  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care are proprietatea din enunț.

**Soluție și barem:**

- a) •  $g(a) = f(1) + f(\log_b a), g(b) = f(1) + f(\log_a b)$  .....2p  
•  $g(a) = g(b) \Rightarrow f(\log_a b) = f(\log_b a)$ ;  $f$  este injectivă, deci  $\log_a b = \log_b a$  .....1p  
•  $(\log_a b)^2 = 1$ , de unde  $\log_a b = \pm 1$  .....1p  
• Dacă  $a = b$  obținem că  $f$  nu este injectivă, deci  $a \cdot b = 1$  .....1p  
b) • Un exemplu este funcția identică  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x, x \in \mathbb{R}$ , care este injectivă .....1p  
• Avem  $g(x) = \log_a x + \log_{\frac{1}{a}} x = \log_a x - \log_a x = 0$ , deci  $g$  este constantă .....1p

**Problema 3.**

Fie  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  și  $a \in \mathbb{R}$  astfel încât  $z^4 - az + 9 = 0$ .

a) Arătați că  $|z|^2(\bar{z}^2 + \bar{z} \cdot z + z^2) = 9$

b) Arătați că  $|\operatorname{Re}(z)| \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

**Soluție și barem:**

- a) •  $a = \frac{z^4+9}{z}$  și cum  $a \in \mathbb{R}$ , vom avea  $\frac{\bar{z}^4+9}{\bar{z}} = \frac{z^4+9}{z} \Rightarrow z \cdot \bar{z}^4 + 9z = \bar{z} \cdot z^4 + 9\bar{z}$  .....2p  
 •  $z \cdot \bar{z}(\bar{z}^3 - z^3) - 9(\bar{z} - z) = 0 \Rightarrow (\bar{z} - z)[|z|^2(\bar{z}^2 + \bar{z} \cdot z + z^2) - 9] = 0$  .....2p  
 •  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow z \neq \bar{z} \Rightarrow |z|^2(\bar{z}^2 + \bar{z} \cdot z + z^2) = 9$  .....1p  
 b) •  $(z + \bar{z})^2 - z \cdot \bar{z} = \frac{9}{|z|^2} \Rightarrow 4(\operatorname{Re}(z))^2 = |z|^2 + \frac{9}{|z|^2}$  .....1p  
 •  $|z|^2 + \frac{9}{|z|^2} \geq 2\sqrt{|z|^2 \cdot \frac{9}{|z|^2}} = 6 \Rightarrow 4(\operatorname{Re}(z))^2 \geq 6 \Rightarrow |\operatorname{Re}(z)| \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$  .....1p

**Problema 4.**

Considerăm triunghiul ascuțitunghic  $ABC$  înscris în cercul  $\mathcal{C}(O, R)$  și  $H$  ortocentrul triunghiului. Fie  $G_1, G_2, G_3$  centrele de greutate ale triunghiurilor  $HBC, HAC$  respectiv  $HAB$ . Dacă  $AG_1 + BG_2 + CG_3 = 4R$ , să se arate că triunghiul  $ABC$  este echilateral.

**Soluție și barem:**

Considerăm reperul cu originea în  $O$  și  $a, b, c, z$  afixele punctelor  $A, B, C$  respectiv  $H$ .

- Avem  $|a| = |b| = |c| = R$  și  $z = a + b + c$  .....1p
- $AG_1 = |z_{G_1} - a| = \left| \frac{1}{3}(z + b + c) - a \right| = \left| \frac{1}{3}(2z - a) - a \right| = \frac{2}{3}|z - 2a|$  .....1p
- Analog obținem  $BG_2 = \frac{2}{3}|z - 2b|, CG_3 = \frac{2}{3}|z - 2c|$  .....1p
- Avem  $AG_1 + BG_2 + CG_3 = \frac{2}{3}(|z - 2a| + |z - 2b| + |z - 2c|)$   
 Utilizând inegalitatea Cauchy-Bunikovski-Schwartz, obținem:  
 $(|z - 2a| + |z - 2b| + |z - 2c|)^2 \leq 3(|z - 2a|^2 + |z - 2b|^2 + |z - 2c|^2)$ , și de aici,  
 prin calcul, obținem  $(|z - 2a| + |z - 2b| + |z - 2c|)^2 \leq 3(3|z|^2 - 2z\bar{z} - 2\bar{z}z + 12R^2)$   
 .....2p
- Rezultă  $(|z - 2a| + |z - 2b| + |z - 2c|)^2 \leq 36R^2 - 3|z|^2 \leq 36R^2$  și de aici  
 $AG_1 + BG_2 + CG_3 \leq 4R$ , cu egalitate dacă și numai dacă  $z = 0$  .....1p
- Rezultă că  $H = O$ , deci triunghiul  $ABC$  este echilateral .....1p